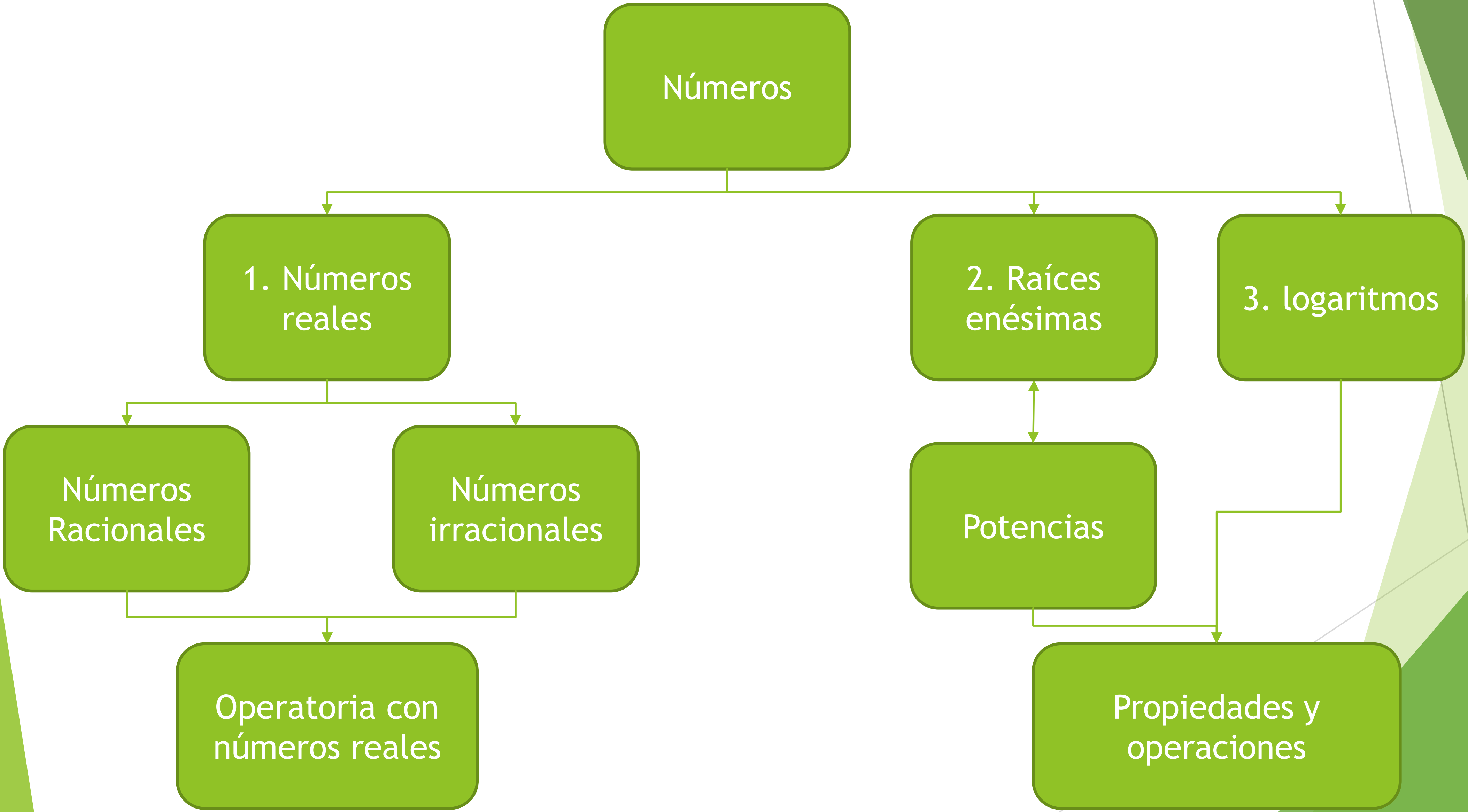
Unidad 1: Números y operaciones

2º medio

Profesora Vanessa Castro Ramírez

Qué contenidos trabajaremos en esta unidad



Recordemos...

- Los números naturales son los que utilizamos en la vida cotidiana para contar u ordenar.
- Los **números naturales** son **ilimitados**, si a un número natural le sumamos 1, obtenemos otro número natural.

$\mathbb{N}$ Los elementos del conjunto $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, 5, \ldots\}$ se denominan **"Números Naturales"**.

$\mathbb{N}_0$ Los **"Números Cardinales"** corresponden a la unión del conjunto de los números naturales con el cero. $\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, \ldots\} = \mathbb{N} \cup \{0\}$

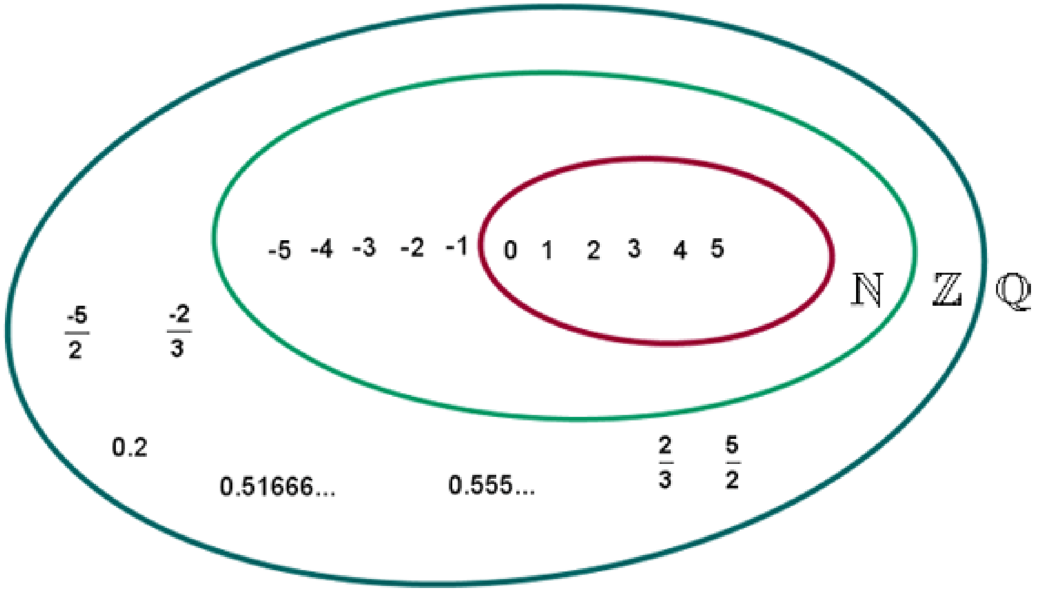
Con los números naturales no era posible realizar diferencias donde el minuendo era menor que el que el sustraendo, pero en la vida nos encontramos con operaciones de este tipo donde a un número menor hay que restarle uno mayor. La necesidad de representar el dinero adeudado, la temperatura bajo cero, profundidades con respecto al nivel del mar, etc. Las anteriores situaciones nos obligan a ampliar el concepto de números naturales, introduciendo un nuevo conjunto numérico llamado números enteros.

$\mathbb{Z}$ Los elementos del conjunto $\mathbb{Z} = \{\ldots,-2,-1, 0, 1, 2,\ldots\}$ se denominan **"Números Enteros"**.

Los números racionales son todos aquellos números de la forma $\frac{a}{b}$ con **a** y **b** números enteros y **b** distinto de cero. El conjunto de los números racionales se representa por la letra **Q**.

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b} \;/\; a, b \in \mathbb{Z} \text{ y } b \neq 0 \right\}$$

Se considera el conjunto de los números enteros un subconjunto de los números racionales. Así:

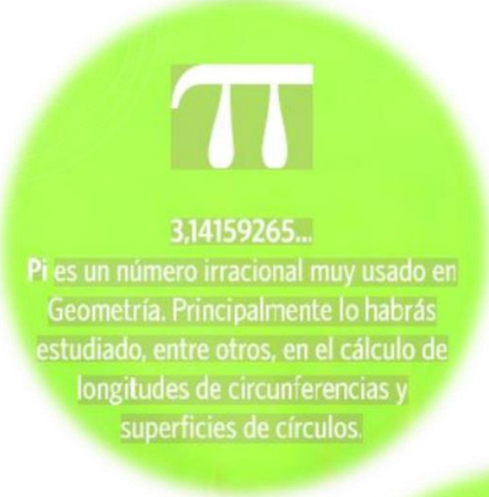


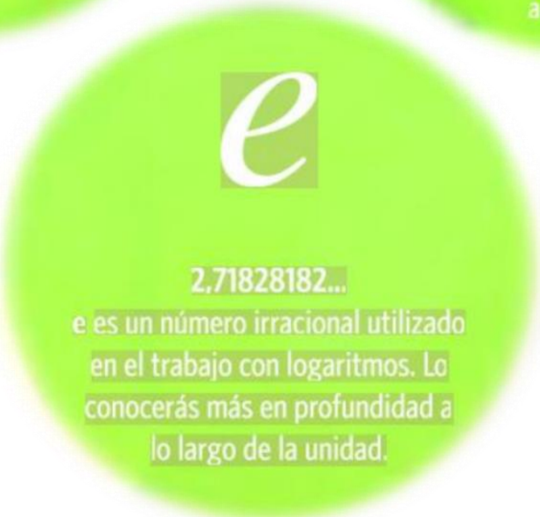
Ahora, considerando la definición de número racional ¿Todos los números se podrán escribir como fracción?

- El número $\pi = 3{,}1415926\ldots$ es un número decimal infinito, el cual no se puede escribir como fracción
- Las raíces cuadradas inexactas son números decimales infinitos por lo tanto tampoco se pueden escribir como fracción
  - $\sqrt{2} = 1{,}4142213\ldots$
  - $\sqrt{3}$
  - $\sqrt{5}$
  - Etc
- Existen muchos otros números que no se pueden escribir como fracción por lo tanto no pertenecen al conjunto de los números racionales

Números Reales, raíces enésimas y logaritmos

A lo largo de tu enseñanza has estudiado distintos conjuntos numéricos. Por ejemplo, el de los números naturales ($\mathbb{N}$), el de los números enteros ($\mathbb{Z}$) y el de los números racionales ($\mathbb{Q}$). En este nivel estudiarás el conjunto de los números irracionales ($\mathbb{I}$), con los que completarás el estudio de los números reales ($\mathbb{R}$), que corresponden a la unión entre los números racionales e irracionales.





Los ***números irracionales*** Son números con desarrollos decimales infinitos no periódicos, como por ejemplo el número $\pi = 3{,}1415927\ldots$ no es posible escribirlo como un cociente de números enteros (fracción).

1. ¿Qué conjuntos numéricos forman al de los números reales?
2. ¿Qué característica tienen los números irracionales que los hacen diferentes a los números racionales? Explica con tus palabras
3. Averigua los valores de Pi, e y Phi con 15 cifras decimales.
4. Averigua sobre otro número irracional conocido y su importancia en las matemáticas

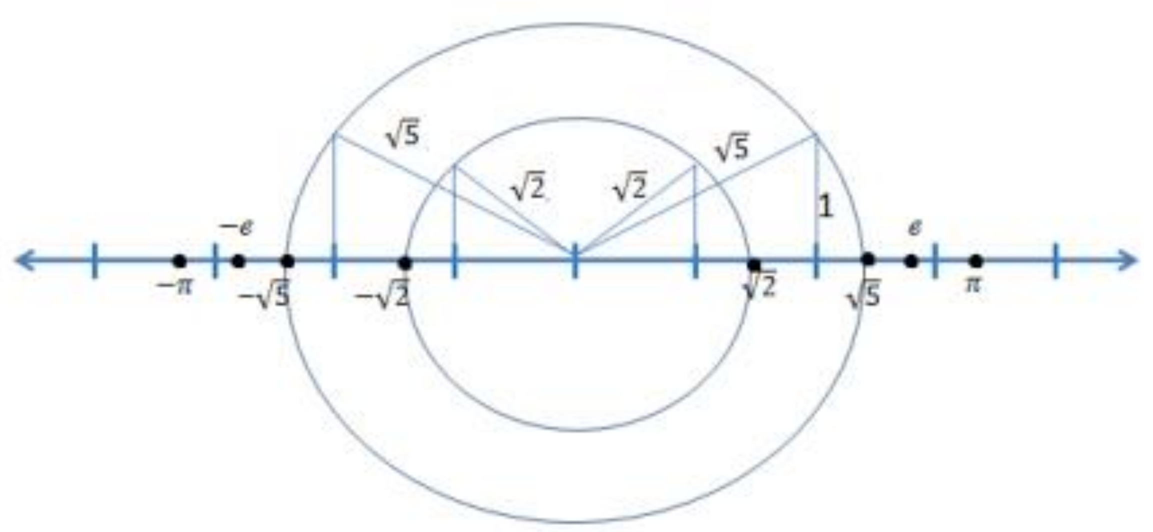
Actividad

Clasificar los siguientes números en racionales o irracionales según corresponda:

1. $1,0100100010001\ldots$
2. $\dfrac{\pi}{4}$
3. $-\sqrt{36}$
4. 0
5. $\sqrt{15}$
6. $4,567567567567567\ldots$
7. $\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\cdot\dfrac{8}{9}\cdot\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$
8. $\dfrac{2\cdot 1,2\overline{34}}{1,\overline{1}}+\dfrac{37,\overline{6}}{37,\overline{6}}$
9. $\sqrt{4}\cdot\sqrt{25}\cdot\sqrt[3]{8}$
10. $\dfrac{10}{\frac{2}{7}+\frac{4}{3}}+\dfrac{\sqrt{8}}{17}$
11. $\pi\cdot\pi$
12. $\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{3}$

Puedes ayudarte por la calculadora para agilizar tus cálculos
El objetivo de esta actividad es determinar que número es decimal infinito no periódico

Los números Irracionales se representan con la letra I



Nota: Los números irracionales NO son un subconjunto de los números racionales.

Aplicaciones de los números irracionales

a. Calcular la medida de la diagonal de un cuadrado de lado 1 cm.

b. Medir la masa corporal de una persona en kilogramos.

c. Calcular la medida de un cateto de un triángulo rectángulo cuya hipotenusa mide 5 cm y el otro cateto mide 4 cm.

d. Calcular el cociente entre la longitud de una circunferencia y la medida de su diámetro.

e. Calcular el valor de $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$. Puedes usar calculadora.

f. Calcular el valor de $\sqrt{65.536}$. Puedes usar calculadora.

Actividad

Investiga acerca del numero áureo y la importancia de este número en el arte y las matemáticas

Responde en tu cuaderno

1. ¿Cómo se definen los números irracionales?
2. Presenta un contraejemplo para justificar la falsedad de cada afirmación.
   a. Todos los números irracionales son raíces cuadradas no exactas.
   b. Al sumar o restar números irracionales, el resultado es un número irracional

Aproximación de números irracionales

Como vemos hay números con infinitas cifras decimales, para poder trabajar con ellos de manera más simple es que utilizamos aproximaciones de dichos números.
Para aproximar un número se puede proceder de dos maneras:

Truncamiento: Se eliminan todas las cifras que no deseamos que aparezcan a partir de un cierto número. Por ejemplo si el número 21, 23898 . . . lo truncamos en los dos primeros decimales queda 21, 23.

Redondeo: Se observa la cifra decimal que se quiere suprimir:

• Si esta cifra es menor que 5, entonces se eliminan los decimales. Por ejemplo si el número 132, 5679321 . . . lo redondeamos a los 4 primeros decimales queda 132, 5679

• Si esta cifra es mayor o igual a 5, entonces se aumenta un una unidad la última cifra que se conserva en el número. Por ejemplo si el número 92, 678592 . . . lo redondeamos a los 3 primeros decimales resulta 92, 679.

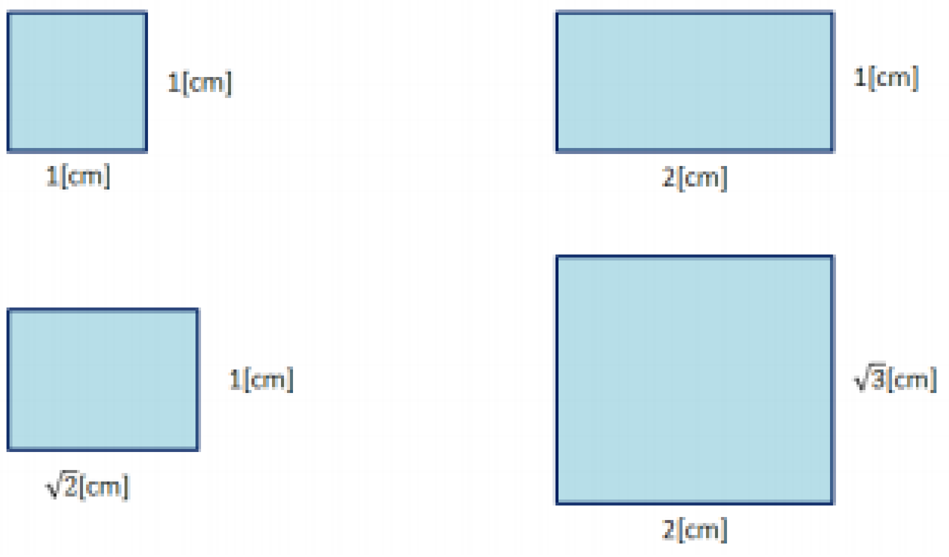
Cuando el valor encontrado es mayor que el original, se dice que se aproximó por exceso; mientras que si el valor es menor que el original, se dice que se aproximó por defecto.

Actividad

Redondear y truncar los resultados de las siguientes operaciones a los 3 primeros decimales:

1. $63,25 : 4$
2. $1,5478 : 0,25$
3. $0,33 : 8$
4. $3,572 \cdot 0,1$
5. $75,123 \cdot 0,5$
6. $0,2013 \cdot 99$
7. $1,48 : 1,0638$
8. $0,97 \cdot 2,062$

Determinar la diagonal de cada cuadrilátero:



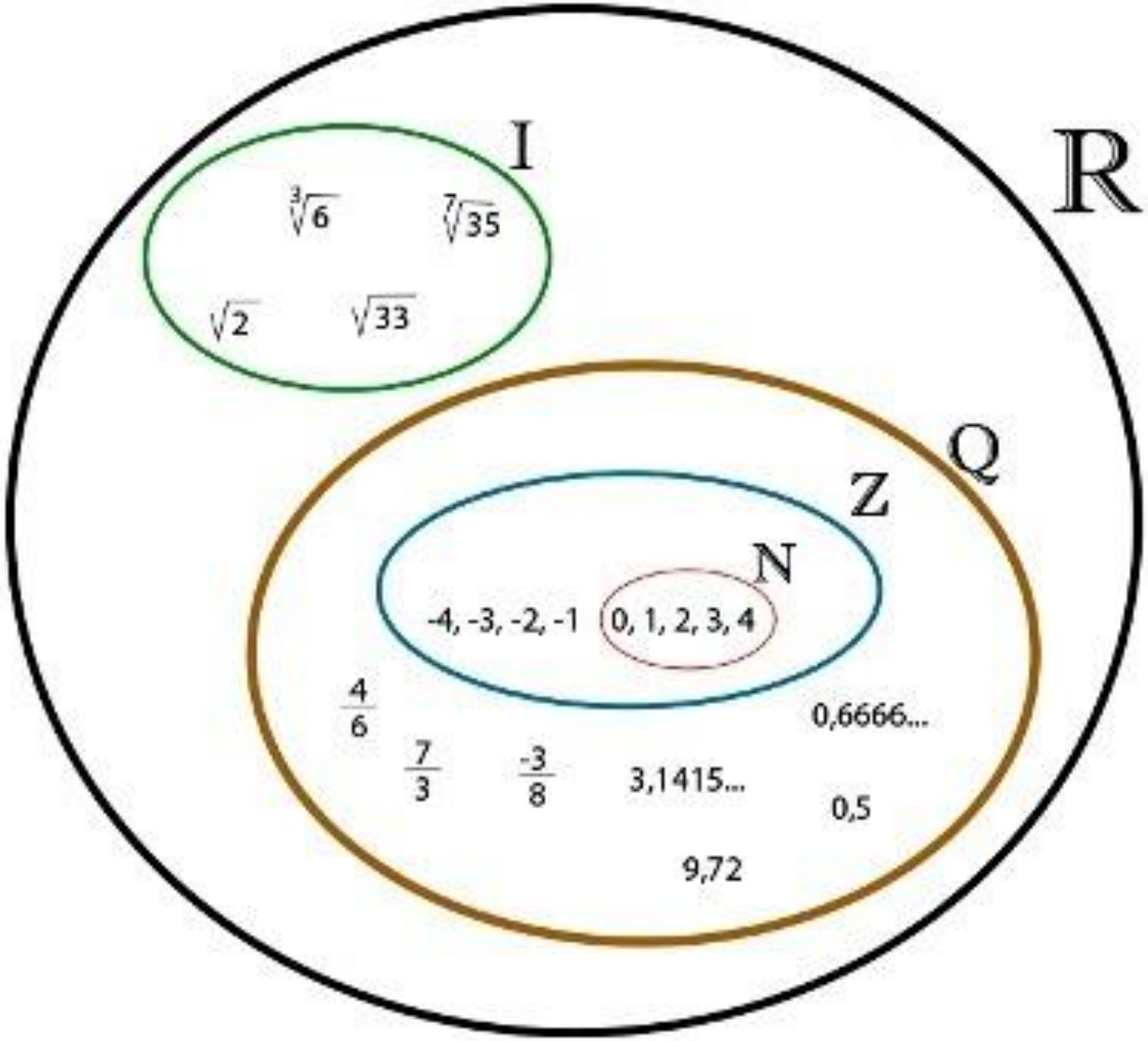
Complementa tu aprendizaje con la siguiente actividad:guia numeros 1.docx

Números Reales

El conjunto de los números reales es infinito y ordenado y tiene como elementos tanto los números racionales como los irracionales. De manera matemática se puede expresar de la siguiente forma:

$$\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{I}$$

Al igual que el conjunto de los racionales, los números reales son densos, esto es, entre dos números reales cualesquiera existe otro número real. Finalmente con los números reales la recta numérica está completa, es decir, a cada punto de la recta numérica le corresponde un número real.



N= números naturales (enteros positivos)
Z= números enteros (positivos y negativos)
Q= números racionales (fracciones y decimales)
I= Irracionales

Resuelve la actividad: guía numeros 2.docx

Propiedades de los números reales

El conjunto de los números reales tiene estructura algebraica de cuerpo, esto es, que para las operaciones definidas en IR, adición(+) y multiplicación(·) se cumplen las siguientes propiedades:

1. Cerrado

Si tomo dos números reales y los sumo o multiplico, ambos resultados corresponden a un número real.
Por ejemplo:

$$5 + 2 = 7 \in IR$$
$$5 \cdot 2 = 10 \in IR$$

En general, para todo $x, y \in IR$, entonces:

$$x + y \in R$$
$$x \cdot y \in R$$

2. Asociativo

Si tengo 3 o más números, la operación que realice es independiente de la agrupación que tengan los números.
Por ejemplo:

$$(2 + 3) + 5 = 10 = 2 + (3 + 5)$$
$$(2 \cdot 3)5 = 30 = 2(3 \cdot 5)$$

En general, para todo $x, y, z \in IR$, entonces:

$$(x + y) + z = x + (y + z)$$
$$(x \cdot y)z = x(y \cdot z)$$

3. Conmutativo

La operación es independiente del orden de los números.
Por ejemplo:

$$4 + 2 = 6 = 2 + 4$$
$$4 \cdot 2 = 8 = 2 \cdot 4$$

En general, para todo $x, y \in IR$, entonces:

$$x + y = y + x$$
$$x \cdot y = y \cdot x$$

4. Distributivo

La suma de dos sumandos, multiplicada por un número, es igual a la suma de los productos de cada sumando por ese número.
Por ejemplo:

$$2 \cdot (1 + 5) = 12 = 2 \cdot 1 + 2 \cdot 5$$

En general, para todo $x, y, z \in IR$, entonces:

$$x(y + z) = x \cdot y + x \cdot z$$

5. Neutro

Al operar cualquier elemento del conjunto con el elemento neutro el resultado es el elemento original.
Por ejemplo:

$$2 + 0 = 2$$
$$3 \cdot 1 = 3$$

En general, para todo $x \in IR$, entonces:

$$Existe\ 0 \in IR\ tal\ que\ x + 0 = 0 + x = x$$
$$Existe\ 1 \in IR\ tal\ que\ x \cdot 1 = 1 \cdot x = x$$

6. Inverso

Al operar cualquier elemento del conjunto con el elemento inverso el resultado es el elemento neutro correspondiente a cada operación. Por ejemplo:

$$2 + (-2) = 0$$
$$3 \cdot 3^{-1} = 1$$

En general, para todo x ∈ R, entonces:

$$Existe\ -x \in IR\ tal\ que\ x + (-x) = (-x) + x = 0$$
$$Existe\ x^{-1} = \frac{1}{x} \in IR - \{0\}\ tal\ que\ x \cdot x^{-1} = 1$$

Operaciones en IR

Como mencionamos todo número real se puede clasificar en racional o irracional. Al trabajar con las operaciones básicas en este conjunto obtenemos las siguientes conclusiones:

- $\mathbb{Q}+\mathbb{Q}=\mathbb{Q}$. Por ejemplo: $\dfrac{1}{2}+4=\dfrac{9}{2}\in\mathbb{Q}$
- $\mathbb{Q}+\mathbb{I}=\mathbb{I}$. Por ejemplo: $4+\sqrt{3}\in\mathbb{I}$
- $\mathbb{I}+\mathbb{I}=\mathbb{Q}$ ó $\mathbb{I}$. Por ejemplo: $\sqrt{2}+\sqrt{2}=2\sqrt{2}\in\mathbb{I}$ ó $\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}+\dfrac{-\sqrt{5}}{2}=\dfrac{1}{2}\in\mathbb{Q}$
- $\mathbb{Q}\cdot\mathbb{Q}=\mathbb{Q}$. Por ejemplo: $\dfrac{1}{5}\cdot 5=1\in\mathbb{Q}$
- $\mathbb{I}\cdot\mathbb{I}=\mathbb{Q}$ ó $\mathbb{I}$. Por ejemplo: $\sqrt[3]{3}\cdot\sqrt[3]{9}=3\in\mathbb{Q}$ ó $\sqrt[3]{3}\cdot\sqrt[3]{2}=\sqrt[3]{6}\in\mathbb{I}$
- $\mathbb{Q}\cdot\mathbb{I}=\mathbb{I}$, si el número de $\mathbb{Q}$ es distinto de cero. Por ejemplo: $2\cdot\pi=2\pi\in\mathbb{I}$

Actividad

Juan realizó el siguiente razonamiento matemático:
Dados a y b dos números cualesquiera. Supongamos que $a = b$, entonces:

$$
\begin{aligned}
a^2 &= ab \\
a^2 + (a^2 - 2ab) &= ab + (a^2 - 2ab) \\
2a^2 - 2ab &= a^2 - ab \\
2a(a - b) &= a(a - b) \\
2a &= a \\
2 &= 1
\end{aligned}
$$

¿Dónde está el error que cometió Juan?

¿Qué es una raíz?

- Una raíz corresponde a un número que, al multiplicarse por sí mismo la cantidad de veces que indique el índice, se obtiene la cantidad subradical.
- Sea c un número real y n un número natural mayor que 1. Si $x^n = c$, decimos que **x es la raíz enésima de c,** que se escribe $\sqrt[n]{c}$, es decir, X es el único número real cuya potencia n-ésima es c.

$$\boxed{X = \sqrt[n]{c} \Leftrightarrow X^n = c \qquad , n \neq 0}$$

X : es la raíz enésima de c , donde:

n : índice.

c : cantidad subradical.

Ejemplos:

$4 = \sqrt[3]{64} \iff 4^3 = 64$

$5 = \sqrt[3]{125} \iff 5^3 = 125$

$2 = \sqrt[4]{16} \iff 2^4 = 16$

¿Qué relación podemos establecer entra las potencias y raíces enésimas?

Relación raíz enésima y potencia

- Existe una estrecha relación entre las potencias y las raíces. En efecto, toda raíz puede ser expresada como una potencia de exponente fraccionario.

$$\sqrt[p]{a^{q}} = a^{\frac{q}{p}} \quad , p \neq 0$$

Ejemplos:

$$\sqrt[4]{3^{3}} \cdot \sqrt{3} = 3^{\frac{3}{4}} \cdot 3^{\frac{1}{2}} = 3^{\frac{5}{4}}$$

$$\sqrt[4]{5} = 5^{\frac{1}{4}}$$

Aplica el contenido con la siguiente actividad: [guia numeros 3.docx]

Propiedades de raíces

- **Multiplicación de raíces de igual índice:** Se conserva el índice y se multiplican los subradicales.

$$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \cdot b} \quad , n \neq 0$$

- **División de raíces de igual índice:** Se conserva el índice y se dividen los subradicales.

$$\sqrt[n]{a} : \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a : b}$$

o bien

$$\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$$

- **Composición o descomposición de raíces.**

a- Composición: Un factor puede ingresar a una raíz si lo elevo al índice de ella (ingresa como factor del subradical)

$$a\sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a^n \cdot b} \quad , n \neq 0$$

b- Descomposición: Un factor puede "salir" de una raíz si dicho factor tiene raíz exacta.

$$\sqrt[n]{a^n \cdot b} = a\sqrt[n]{b} \quad , n \neq 0$$

Raíz de una raíz: Se deben multiplicar los índices.

$$\sqrt[p]{\sqrt[q]{a}} = \sqrt[p \cdot q]{a} \quad , p \wedge q \neq 0$$

- **Suma y resta de raíces:** Para **sumar o restar** dos radicales, éstos deben ser semejantes.

Radicales semejantes son aquellos que **tienen el mismo índice y el mismo radicando**. Pueden diferir únicamente en el coeficiente que los multiplica.

Para comprobar si dos radicales son semejantes o no, se simplifican si se puede y se extraen todos los factores que sea posible.

La suma o resta de radicales semejantes es otro radical semejante a los datos, cuyo coeficiente es igual a la suma o resta de los coeficientes de los radicales.

Ejemplos:

$$-\sqrt{2} + 3\sqrt{2} - 4\sqrt{2} + 8\sqrt{2} =$$

$$(-1 + 3 - 4 + 8)\cdot\sqrt{2} =$$

$$6\sqrt{2}$$

$$7\sqrt{5} - 6\sqrt{3} + 8\sqrt{5} - 3\sqrt{3} - 4\sqrt{3} =$$

Agrupamos términos semejantes

$$(7 + 8)\cdot\sqrt{5} + (-6 - 3 - 4)\cdot\sqrt{3}$$

$$15\sqrt{5} - 13\sqrt{3}$$

Resolver los ejercicios:

a) $3\sqrt{2} + 5\sqrt{2} - 7\sqrt{2} =$

b) $5\sqrt{5} + 4\sqrt{20} - 3\sqrt{45} =$

c) $2\sqrt[3]{54} - \sqrt[3]{24} - 3\sqrt[3]{16} =$

d) $3\sqrt{2} + 2\sqrt{3} - \sqrt{12} =$

Resolver la siguiente actividad apoyándote en estos apuntes: guia numeros 4.docx

Descomposición de raíces: ejemplo.

A continuación se muestra cómo descomponer raíces cuadradas de números naturales:

Número natural: 12

PASO 1 $\sqrt{12}$

PASO 2 $\sqrt{4 \cdot 3}$

PASO 3 $\sqrt{4} \cdot \sqrt{3}$

PASO 4 $2 \cdot \sqrt{3}$

Sigan la estructura presentada en el esquema para descomponer las siguientes raíces cuadradas:

a. $\sqrt{72}$

b. $\sqrt{250}$

c. $\sqrt{100\,000}$

d. $\sqrt{\frac{75}{16}}$

e. $\sqrt{\frac{48}{50}}$

f. $\sqrt{\frac{162}{45}}$

g. $\sqrt{0{,}27}$

h. $\sqrt{4{,}50}$

i. $\sqrt{0{,}0012}$

j. $\sqrt{0{,}64}$

Racionalizar raíces cuadradas

- Dada una expresión fraccionaria que contiene una o mas raíces cuadradas no exactas en su denominador, racionalizar la expresión es transformarla de modo que no posea raíces en el denominador, sin cambiar su valor. Para esto, se amplifica por una expresión tal que se elimine la o las raíces del denominador
- Por ejemplo:

$$\frac{a}{\sqrt{b}} \cdot \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{b}} = \frac{a\sqrt{b}}{b}$$

$$\frac{a}{\sqrt{b}+\sqrt{c}} \cdot \frac{\sqrt{b}-\sqrt{c}}{\sqrt{b}-\sqrt{c}} = \frac{a\sqrt{b}-a\sqrt{c}}{b-c} \qquad \frac{a}{\sqrt{b}-\sqrt{c}} \cdot \frac{\sqrt{b}+\sqrt{c}}{\sqrt{b}+\sqrt{c}} = \frac{a\sqrt{b}+a\sqrt{c}}{b-c}$$

con $a \in \mathbb{R}$, $b, c \in \mathbb{R}^+$ y $b \neq c$

Actividad:

Racionaliza las siguientes expresiones.

a. $\frac{1}{\sqrt{5}}$

b. $\frac{6}{\sqrt{13}}$

c. $\frac{8}{\sqrt{5}}$

d. $\frac{5}{\sqrt{5}-\sqrt{2}}$

e. $\frac{9}{\sqrt{7}+\sqrt{10}}$

f. $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1}$

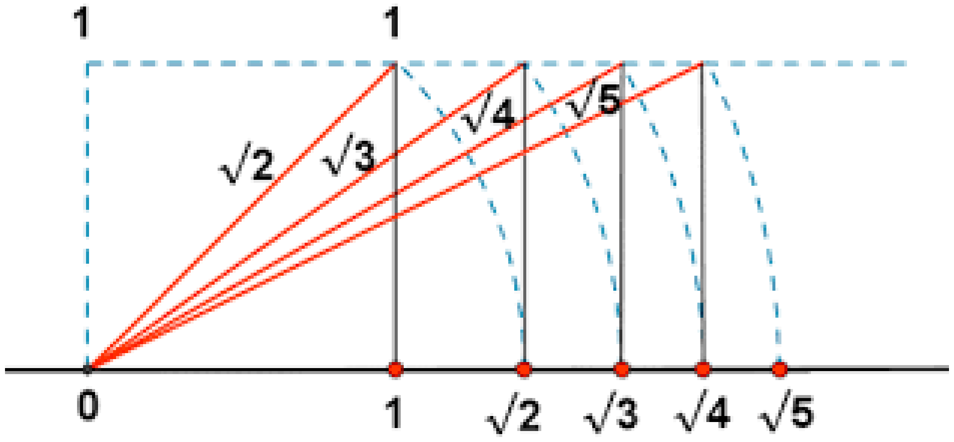
g. $\frac{\sqrt{11}+\sqrt{3}}{\sqrt{11}-\sqrt{3}}$

h. $\frac{7}{\sqrt{\sqrt{12}+\sqrt{3}}}$

Raíces cuadradas y raíces cúbicas

- Los números reales se pueden ubicar en la recta numérica, sin embargo, el proceso para situar un número irracional es distinto al de situar números racionales. Por ejemplo, para ubicar las $\sqrt{2}$ y $\sqrt{3}$, se puede aplicar el procedimiento usado por Teodoro de Cirene, maestro de Platón.

Actividad: Investigar el procedimiento usado por Cirene y ubicar $\sqrt{2}$ y $\sqrt{3}$ en la recta numérica utilizando instrumentos geométricos



Materiales necesarios para esta actividad:
- Papel milimetrado
- Regla
- Compás

Observa la siguiente demostración de que $\sqrt{2}$ es un número irracional

Se demostrará que $\sqrt{2}$ es un número irracional.

1. Supón que $\sqrt{2}$ es un número racional.
   Entonces, se podría escribir de la forma $\frac{a}{b}$,
   donde $a, b \in \mathbb{Z}$, $b \neq 0$ y la fracción es irreductible. Esto es: $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$
2. De la igualdad se tiene que:

$$\left.\begin{array}{l} \sqrt{2} = \dfrac{a}{b} \quad /()^2 \\ 2 = \dfrac{a^2}{b^2} \end{array}\right] \Rightarrow 2b^2 = a^2$$

3. De **2** se puede concluir que $\mathbf{a^2}$ es par.
4. De **3** se puede concluir que **a** es par.
5. Como **a** es par, se tiene que $a = 2k$, $k \in \mathbb{N}$.
   Luego, reemplazando en **2** se tiene $b^2 = 2k^2$.
6. De **5** se concluye que **b** también es par.
7. Como **a** y **b** son pares, tienen factor común 2.
   Lo concluido en **7** es falso porque **a** y **b** forman una fracción irreductible, por lo que no pueden tener múltiplos comunes.

Actividad: Guíate por este ejemplo y demuestra que $\sqrt{3}$ es un número irracional

Operatoria combinada en IR

- Procedimiento que combina todas las operaciones

  1° Pasar a fracción los números mixtos o decimales.
  2° efectuar las operaciones que se encuentran dentro de los paréntesis, llaves, o corchetes; de adentro hacia afuera.
  3° calcular las potencias y raíces.
  4° Efectuar los productos y cocientes.
  5° Realizar las sumas y resta

Lo que conocemos como PAPOMUDAS

Ejemplo: Analiza el siguiente procedimiento

$$M = \sqrt[3]{\left[\frac{\left(4+\frac{1}{2}\right)^2}{\frac{1}{20}+\frac{2}{5}}\right] \cdot \frac{81}{20\cdot16}} = \sqrt[3]{\left[\frac{\left(\frac{9}{2}\right)^2}{\frac{9}{20}}\right] \cdot \frac{81}{20\cdot16}} = \sqrt[3]{\left[\frac{\left(\frac{9}{2}\right)^2}{\frac{9}{20}}\right] \cdot \frac{81}{20\cdot16}}$$

$$= \sqrt[3]{\left[\frac{\frac{9^2}{2^2}}{\frac{9}{20}}\right] \cdot \frac{81}{20\cdot16}} = \sqrt[3]{\left[\frac{9^2\cdot20}{2^2\cdot9}\right] \cdot \frac{81}{20\cdot16}} = \sqrt[3]{\frac{9\cdot81}{4\cdot16}} = \sqrt[3]{\frac{729}{64}}$$

$$= \sqrt[3]{\frac{9^3}{2^6}} = \frac{9^{\frac{3}{3}}}{2^{\frac{6}{3}}} = \frac{9^1}{2^2} = \frac{9}{4}$$

Actividad: Resolver los ejercicios

- $\sqrt[3]{-\frac{1728}{27}}$
- $\sqrt[3]{\sqrt{\sqrt{\left(\frac{9}{4}\right)^6}}}$
- $\left(\frac{25}{16}\right)^{\frac{3}{2}}$
- $\frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{7}{12}}{\frac{1}{2}-\frac{2}{15}} \cdot \sqrt{\left(\frac{5}{9}\right)^{-2} \cdot \frac{1}{3^2}}$
- $\left(\frac{\frac{8}{7}-\frac{1}{4}-\frac{7}{9}-\frac{1}{6}}{\frac{4}{7}-\frac{5}{12}}\right)^{\frac{2}{3}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{-1}}$

Refuerza contenidos relacionados a raíces

- Resuelve la actividad guia numeros 5 refuerzo.docx
- Para esto es necesario que recuerdes conceptos de álgebra de 1º medio como productos notables y factorización.

- Para finalizar el contenido resuelve la siguiente actividad: guia numeros 6.docx

Raíces enésimas

Como sabes, $\sqrt{25}=5$ ya que $5^2 = 25$. Por otra parte, $5=5^{\frac{2}{2}}=\left(5^2\right)^{\frac{1}{2}}=25^{\frac{1}{2}}$. Luego, se puede afirmar que $\sqrt{25}=25^{\frac{1}{2}}$. Lo anterior se cumple para otras raíces cuadradas, por ejemplo: $\sqrt{36}=6=6^{\frac{2}{2}}=\left(6^2\right)^{\frac{1}{2}}=36^{\frac{1}{2}}$; $\sqrt{49}=7=7^{\frac{2}{2}}=\left(7^2\right)^{\frac{1}{2}}=49^{\frac{1}{2}}$; $\sqrt{144}=12=12^{\frac{2}{2}}=\left(12^2\right)^{\frac{1}{2}}=144^{\frac{1}{2}}$; etc.
Al generalizar esta relación entre raíces cuadradas y potencias de exponente racional, se tiene que $\sqrt{a}=a^{\frac{1}{2}}$. Sin embargo, esta relación también se cumple para otros índices de raíces. Por ejemplo: $\sqrt[3]{27}=3=3^{\frac{3}{3}}=\left(3^3\right)^{\frac{1}{3}}=27^{\frac{1}{3}}$; $\sqrt[4]{625}=5=5^{\frac{4}{4}}=\left(5^4\right)^{\frac{1}{4}}=625^{\frac{1}{4}}$; etc.

En una raíz enésima $\sqrt[n]{a}$, su índice n es un numero natural y su cantidad subradical a es un numero racional si n es impar y mayor o igual que cero si n es par
En la relación $\sqrt[n]{a^m}=(\sqrt[n]{a})^m=a^{\frac{m}{n}}, a^m si\ n\ es\ par\ y\ a^m \in \mathbb{Q}^+ \cup \{0\}\ si\ n\ es\ par.$ Además se debe considerar que $a^m \neq 0^0$ y $m \in \mathbb{Z}$

Algunas propiedades

$$\sqrt[n]{1}=1$$
$$\sqrt[n]{0}=0$$
$$\sqrt[n]{a^n}=(\sqrt[n]{a})^n=a^{\frac{n}{n}}=a\ ; a\geq 0$$
$$\sqrt[n]{a}=a^{\frac{1}{n}}$$

Algunas propiedades utilizadas en el cálculo de raíces son:

Multiplicación de raíces con igual índice

$$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \cdot b}$$

División de raíces con igual índice

$$\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$$

Potencia de una potencia

$$\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[n \cdot m]{a}$$

Ejemplo: aplicación de propiedades

$$\frac{\sqrt{x^3}\cdot\sqrt[5]{x^{-4}}}{\sqrt[10]{x^7}:\sqrt[5]{x^2}}=\frac{x^{\frac{3}{2}}\cdot x^{\frac{4}{5}}}{x^{\frac{7}{10}}:x^{\frac{2}{5}}}=\frac{x^{\frac{3}{2}-\frac{4}{5}}}{x^{\frac{7}{10}-\frac{2}{5}}}=\frac{x^{\frac{7}{10}}}{x^{\frac{3}{10}}}=\frac{\sqrt[10]{x^7}}{\sqrt[10]{x^3}}$$

$$=\sqrt[10]{\frac{x^7}{x^3}}=\sqrt[10]{x^4}=\sqrt[5]{x^2}$$

Observa muy bien cada paso del ejercicio para luego aplicarlo en la siguiente actividad: guia numeros 7.docx

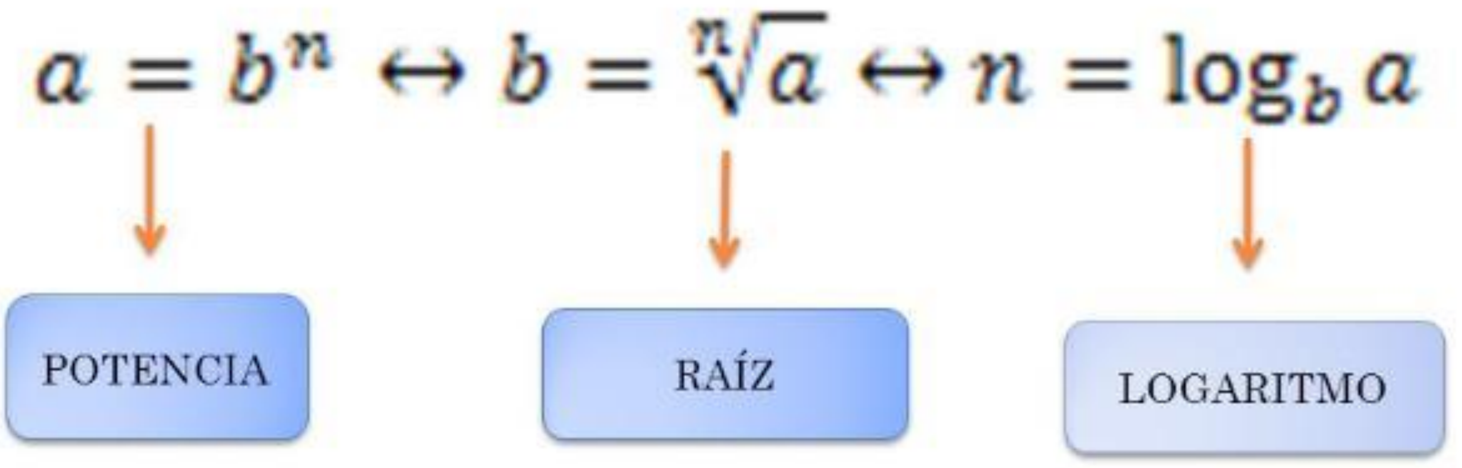
Logaritmos

- En las calculadoras científicas puedes encontrar la tecla log que representa el logaritmo en base 10 de un número. Utilizándola podrás comprobar que:

$$\log 2 = 0{,}30102\ldots$$
$$\log 5 = 0{,}69897\ldots$$
$$\log 500 = 2{,}698987\ldots$$

- ¿Qué opinas de la afirmación: Todo numero real positivo r se puede escribir como una potencia de base 10 y exponente x, es decir $10^x = r$?
- ¿Cómo escribirías el número 1000 en base 10?¿y en base 5?

Relación POTENCIA-RAIZ-LOGARITMO



El logaritmo también es una operación inversa de las potencias, consiste en calcular el exponente cuando se conocen la base y la potencia

Definición

- $Si\ \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^+, con\ a \neq 1\ y\ \boldsymbol{n} \in \mathbb{R}$, entonces se tiene que

$$\log_a b = n \Leftrightarrow a^n = b$$

Donde:

- a es la base del logaritmo
- b el argumento

Y se lee "*Logaritmo de b en base a es igual a n*"

Ejemplos:

$$\log_2 16 = 4, ya\ que\ 2^4 = 16$$

$$\log_4 16 = 2, ya\ que\ 4^2 = 16$$

$$\log_{10} \frac{1}{10} = -1, ya\ que\ 10^{-1} = \frac{1}{10}$$

$$\log_{\frac{5}{2}} 1 = 0\ ya\ que\ \left(\frac{5}{2}\right)^0 = 1$$

Actividad: Interpreta cada uno de los enunciados y completa con la potencia correspondiente

a. $\log_5 25 = 2$, ya que ________ .

b. $\log \frac{1}{100} = -2$, ya que ________ .

c. $\log_{\frac{3}{2}} \frac{9}{4} = 2$, ya que ________ .

d. $\log_{\frac{1}{1.000}} \frac{1}{1.000} = 1$, ya que ________ .

e. $\log_{0,1} 0{,}1 = 1$, ya que ________ .

f. $\log_2 \sqrt{2} = \frac{1}{2}$, ya que ________ .

g. $\log_7 \sqrt[3]{7} = \frac{1}{3}$, ya que ________ .

h. $\log_{\frac{2}{5}} \frac{25}{4} = -2$, ya que ________ .

Propiedades de los logaritmos

- $Si\ \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}\ \in \mathbb{R}^{+}, con\ a \neq 1$, se cumplen las siguientes propiedades

1. $a^{\log_a b} = b$
2. $\log_a 1 = 0$
3. $\log_a a = 1$
4. $\log_a a^n = n$
5. $\log_a (b \cdot c) = \log_a b + \log_a c$
6. $\log_a \left(\frac{b}{c}\right) = \log_a b - \log_a c$
7. $\log_a b^n = n \cdot \log_a b$
8. $\log_a \sqrt[n]{b} = \frac{\log_a b}{n}, n \in \mathbb{N}$
9. $\log_a b = \log_a b \Rightarrow b = c$

Actividad: Verificar cada una de las propiedades de logaritmos mediante un ejemplo en tu cuaderno

Actividad 1: Calcular por la definición de logaritmo el valor de y.

1. $\log_{\frac{1}{2}} 0{,}25 = y$

2. $\log_{\sqrt{5}} 125 = y$

3. $log\, 0{,}001 = y$

4. $\log_{\sqrt{3}} \sqrt[5]{\frac{1}{81}} = y$

Actividad 2: Calcula el valor de x aplicando la definición de logaritmo.

1. $\log_2 32 = x$
2. $\log_9 \frac{1}{3} = x$
3. $\log_9 \sqrt[4]{3} = x$
4. $\log_{\sqrt{2}} \frac{1}{4} = x$
5. $\log_x 81 = -4$
6. $\log_2 x^3 = 6$

Actividad 3: Resolver

- 1. El logaritmo de un cierto número en base 3 es 1/2. Hallar dicho número.
- 2. El logaritmo de una cierta base del número 81 es -4. Calcula la base.
- 3. Si se multiplica el número n por 36, su logaritmo en cierta base aumenta en dos unidades. ¿Cuál es la base? ¿Y si el logaritmo disminuyese en dos unidades?
- 4. Encuentra la base del sistema de logaritmos en la que el logaritmo de 48 excede al logaritmo de 6 en 3 unidades.
- 5. El logaritmo de base 10 de cierto número es 1. Hallar dicho número.

Actividad de Unidad

- Resuelve la siguiente actividad :guia numeros 8.docx
- Esta guía contiene cada uno de los contenidos trabajados en la unidad